

Simuler une loi de Poisson

Marc Lorenzi

6 mai 2026

1 Loi exponentielle

Dans tout l'article $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

1.1 Introduction

Définition 1. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire absolument continue. Soit $\beta > 0$. La variable aléatoire X suit la *loi exponentielle de paramètre β* si sa fonction de densité de probabilité est de la forme

$$f_X(x) = \beta e^{-\beta x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

On note alors $X \sim \mathcal{E}(\beta)$.

Si $X \sim \mathcal{E}(\beta)$, la fonction de distribution de X est la fonction F_X définie par $F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$ et pour tout $x > 0$,

$$F_X(x) = \int_0^x \beta e^{-\beta t} dt = 1 - e^{-\beta x}$$

1.2 Absence de mémoire

Lemme 1. Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, $g(s+t) = g(s) + g(t)$. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $g(s) = as$.

Démonstration. Par une récurrence immédiate, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathbb{R}_+$,

$$(\star) \quad g(ns) = ng(s)$$

Posons $a = g(1)$. Par $(\star)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = ng(1) = an$. Soit $s \in \mathbb{Q}_+$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = p/q$. De là, par $(\star)$,

$$ap = g(p) = g(qx) = qg(x)$$

d'où $g(x) = ax$ en divisant par q . Soit enfin $x \in \mathbb{R}_+$. Par la densité de $\mathbb{Q}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels positifs qui tend vers x . Par la continuité de g en x , $g(x_n)$ tend vers $g(x)$. Or, $g(x_n) = ax_n$ tend aussi vers ax . Par l'unicité de la limite, $g(x) = ax$. $\square$

Proposition 2. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire continue. X suit une loi exponentielle si et seulement si

- (i) Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}(X > s) > 0$.
- (ii) pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$.

Remarquons que la condition (i) est nécessaire pour que la condition (ii) ait un sens.

Démonstration. Supposons $X \sim \mathcal{E}(\beta)$ où $\beta > 0$. Soit $s \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\mathbb{P}(X > s) = e^{-\beta s} > 0$$

Soient $s, t \in \mathbb{R}_+$. Remarquons que $\{X > s + t\} \subseteq \{X > s\}$. On a donc

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\beta(s+t)}}{e^{-\beta s}} = e^{-\beta t} = \mathbb{P}(X > t)$$

Inversement, supposons (i) et (ii). Par (ii), on a pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$ (restreinte à $\mathbb{R}_+$). Comme X est continue, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, et pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$,

$$f(s + t) = f(s)f(t)$$

Par (i), f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Posons $g = \ln f$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, $g(s + t) = g(s) + g(t)$. Par le lemme ci-dessus, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $g(s) = as$. De là, $f(s) = e^{as}$. De plus, $F_X(s)$ tend vers 1 lorsque s tend vers l'infini, donc $f(s) = 1 - F_X(s)$ tend vers 0. On a donc $a = -\beta$ où $\beta > 0$. Ainsi, pour tout $s \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X > s) = e^{-\beta s}$$

d'où

$$\mathbb{P}(X \leq s) = 1 - e^{-\beta s}$$

Ainsi, $X \sim \mathcal{E}(\beta)$. $\square$

1.3 Simuler une loi exponentielle

Proposition 3. Soit $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On suppose que Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. Soit $\beta > 0$. Soit $X = -\frac{1}{\beta} \ln Y$. Alors, $X \sim \mathcal{E}(\beta)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$X(\omega) \leq x \iff Y(\omega) \geq e^{-\beta x}$$

Ainsi, $\{X \leq x\} = \{Y \geq e^{-\beta x}\}$. Si $x < 0$, $e^{-\beta x} > 1$ et donc $\{Y \geq e^{-\beta x}\} = \emptyset$. De là, $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$. Si $x \geq 0$ alors, en remarquant que $0 < e^{-\beta x} \leq 1$,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Y \in [e^{-\beta x}, 1]) = 1 - e^{-\beta x}$$

Ainsi, $X \sim \mathcal{E}(\beta)$. $\square$

2 Loi Gamma

2.1 Introduction

Définition 2. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire absolument continue. Soient $\alpha, \beta > 0$. La variable aléatoire X suit la *loi Gamma de paramètres α et β* si sa fonction de densité de probabilité est de la forme

$$f_X(x) = x^{\alpha-1} \frac{\beta^\alpha e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

On note alors $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.

Remarque. La fonction f_X est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \beta^{\alpha-1} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta dx \\ &\stackrel{t=\beta x}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = 1 \end{aligned}$$

La fonction f_X est donc bien une densité de probabilité.

Remarque. La loi exponentielle est un cas particulier de loi Gamma : $\mathcal{E}(\beta) = \Gamma(1, \beta)$.

2.2 Sommes de lois Gamma

Proposition 4. Soient $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ et $Y \sim \Gamma(\alpha', \beta)$ où $\alpha, \alpha', \beta > 0$. Alors, $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \alpha', \beta)$.

Démonstration. Par l'indépendance de X et Y , on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$$

Si $x \leq 0$, cette intégrale est nulle. Prenons $x > 0$. On a

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(x) &= \int_0^x t^{\alpha-1} \frac{\beta^\alpha e^{-\beta t}}{\Gamma(\alpha)} (x-t)^{\alpha'-1} \frac{\beta^{\alpha'} e^{-\beta(x-t)}}{\Gamma(\alpha')} dt \\ &= \frac{\beta^{\alpha+\alpha'} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha')} \int_0^x t^{\alpha-1} (x-t)^{\alpha'-1} dt \end{aligned}$$

L'intégrale restante est $B(\alpha, \alpha')$ où B est la *fonction Beta* :

$$B(\alpha, \alpha') = \int_0^x t^{\alpha-1} (x-t)^{\alpha'-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha + \alpha')}$$

Ainsi,

$$f_{X+Y}(x) = \frac{\beta^{\alpha+\alpha'} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha + \alpha')}$$

d'où $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \alpha', \beta)$. $\square$

Corollaire 5. Soit $n \geq 1$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta > 0$. Soient $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$. Alors,

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta\right)$$

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur n . Pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer. Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vérifiée par n . Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \beta > 0$. Soient $X_1, \dots, X_{n+1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des variables aléatoires indépendantes. Supposons que pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$. Par l'hypothèse de récurrence,

$$X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta\right)$$

Par le lemme des coalitions, les variables aléatoires $X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes, d'où le résultat. $\square$

Remarque. Les résultats précédents nous permettent de simuler la loi $\Gamma(n, \beta)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta > 0$.

3 Loi de Poisson

3.1 Introduction

Définition 3. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire. Soit $\lambda > 0$. La variable aléatoire X suit la *loi de Poisson* de paramètre λ si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

On note alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Nous avons donc bien une loi de probabilité.

Remarque. On peut étendre légèrement la définition ci-dessus en supposant que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ où ∞ est une « valeur exceptionnelle ». On a l'union disjointe

$$\Omega = \{X = \infty\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X = n\}$$

De là, par la σ -additivité de $\mathbb{P}$,

$$1 = \mathbb{P}(X = \infty) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = \infty) + 1$$

d'où $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$. On a donc presque sûrement $X \neq \infty$.

3.2 Loi de Poisson et sommes de lois exponentielles

Soit $\mathcal{F} = (X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur Ω . On suppose que la suite $\mathcal{F}$ est indépendante et que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \sim \mathcal{E}(1)$.

Pour tout $n \geq 1$, posons

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Donnons-nous un réel $\lambda > 0$.

Proposition 6. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\mathbb{P}(S_n < \lambda \leq S_{n+1}) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Démonstration. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \sim \mathcal{E}(1) = \Gamma(1, 1)$. Par l'indépendance des X_i ,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, 1)$$

c'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{S_n}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n < \lambda) &= \int_0^\lambda \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx \\ &= \left[\frac{x^n}{n!} e^{-x} \right]_0^\lambda + \int_0^\lambda \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + \mathbb{P}(S_{n+1} < \lambda) \end{aligned}$$

On a l'inclusion $\{S_{n+1} < \lambda\} \subseteq \{S_n < \lambda\}$, et donc

$$\mathbb{P}(S_n < \lambda) - \mathbb{P}(S_{n+1} < \lambda) = \mathbb{P}(\{S_n < \lambda\} \setminus \{S_{n+1} < \lambda\}) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Il reste à remarquer que

$$\{S_n < \lambda\} \setminus \{S_{n+1} < \lambda\} = \{S_n < \lambda \leq S_{n+1}\}$$

□

3.3 Une nouvelle variable aléatoire

Posons $S_0 = 0$. Pour tout $\omega \in \Omega$, notons

$$E(\omega) = \{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) < \lambda\}$$

L'ensemble $E(\omega)$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $0 \in E(\omega)$.

Soit $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ définie par $N(\omega) = \max E(\omega)$, en convenant que $\max \mathbb{N} = \infty$.

Proposition 7. *N est une variable aléatoire et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $N(\omega) = n$ si et seulement si

$$S_n(\omega) < \lambda < S_{n+1}(\omega)$$

De là,

$$\{N = n\} = \{S_n < \lambda \leq S_{n+1}\} = \{S_n < \lambda\} \setminus \{S_{n+1} < \lambda\} \in \mathcal{T}$$

Pour conclure que N est une variable aléatoire, il reste à remarquer que

$$\{N = \infty\} = \Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{N = n\} \in \mathcal{T}$$

Par la proposition précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Enfin, par la remarque faite plus haut, $\mathbb{P}(N = \infty) = 0$. Ainsi, $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. $\square$

3.4 Simuler une loi de Poisson

Donnons nous une suite $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur Ω , et suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(]0, 1])$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit $X_i = -\ln Y_i$. Par le lemme des coalitions, la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est indépendante. De plus, par la proposition 3, on a pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \sim \mathcal{E}(1)$.

En reprenant les notations déjà vues plus haut, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i = -\ln \prod_{i=1}^n Y_i$$

De là, pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) < \lambda$ si et seulement si

$$\prod_{i=1}^n Y_i(\omega) > e^{-\lambda}$$

Ainsi, si $N(\omega) \neq \infty$, alors $N(\omega)$ est l'unique $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\prod_{i=1}^n Y_i(\omega) > e^{-\lambda} \geq \prod_{i=1}^{n+1} Y_i(\omega)$$