

Existe-t-il des suites de variables aléatoires indépendantes ?

Marc Lorenzi

6 juillet 2024

Résumé

Beaucoup de problèmes élémentaires de probabilités font intervenir des suites de variables aléatoires indépendantes, par exemple des suites de tirages à pile ou face. En revanche, peu de cours élémentaires de probabilités montrent que de telles suites existent. Nous allons construire explicitement une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

1 Quelques rappels

Soit Ω un ensemble. Une *tribu* (ou σ -*algèbre*) sur Ω est un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de Ω vérifiant

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$
- Pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
- Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{F}$.

On peut montrer qu'étant donné un ensemble quelconque $\mathcal{E}$ de parties de Ω , il existe une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω , minimale au sens de l'inclusion, telle que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$. Cette tribu est la *tribu engendrée par $\mathcal{E}$* .

Enfin, étant donné un ensemble Ω et une tribu $\mathcal{F}$ de parties de Ω , une *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ vérifiant

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ *disjoints deux à deux*,

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un *espace probabilisé*.

2 Un espace probabilisé

2.1 Boréliens et mesure de Lebesgue

Considérons l'ensemble $\Omega = [0, 1]$. La tribu $\mathcal{B}$ des *boréliens* de Ω est la tribu sur Ω engendrée par les intervalles inclus dans Ω . On peut montrer qu'il existe une unique mesure $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{B})$ telle que pour tout intervalle I inclus dans Ω , $\mathbb{P}(I)$ soit la longueur de I . Cette mesure est la *mesure de Lebesgue*. Comme $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, le triplet $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Remarquons que les singletons $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$ appartiennent à $\mathcal{B}$ et sont de probabilité nulle. En effet, un singleton est un intervalle de longueur nulle. Par l'additivité dénombrable des tribus et des probabilités, pour toute partie A de Ω *dénombrable*, $A \in \mathcal{B}$ et $\mathbb{P}(A) = 0$.

2.2 Développements binaires

Faisons quelques rappels sur le développement binaire des réels. Pour tout $\omega \in \Omega$, il existe une suite $(a_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de $\{0, 1\}$ telle que

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$$

La suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est un *développement binaire* de ω et les a_k sont les *chiffres* de ce développement. Nous écrivons

$$\omega = 0.a_1a_2a_3\dots$$

Une partie de Ω joue un rôle particulier vis à vis des développements binaires. Soit

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{p}{2^m} : m \in \mathbb{N}^*, p \in \llbracket 1, 2^m - 1 \rrbracket \right\}$$

Soit $\omega \in \Omega$. On a $\omega \in \mathcal{D}$ si et seulement si il existe $m \geq 1$ et une suite finie $(a_1, \dots, a_{m-1}) \in \{0, 1\}^{m-1}$ tels que

$$\omega = 0.a_1\dots a_{m-1}1000\dots$$

Un tel entier m et une telle suite $(a_1, \dots, a_{m-1})$ sont déterminés de façon unique à partir de ω . Le réel $\omega \in \mathcal{D}$ possède exactement deux développements binaires. L'autre développement binaire de ω est

$$\omega = 0.a_1\dots a_{m-1}0111\dots$$

Si, en revanche, $\omega \notin \mathcal{D}$, alors ω possède un unique développement binaire.

Pour prendre un exemple, $3/4 \in \mathcal{D}$ et

$$\frac{3}{4} = 0.1100\dots = 0.1011\dots$$

Remarquons que, par notre choix de ne considérer que des réels du segment $[0, 1]$, 0 et 1 n'appartiennent pas à $\mathcal{D}$. L'unique développement binaire de 0 est

$$0 = 0.000\dots$$

et l'unique développement binaire de 1 est

$$1 = 0.111 \dots$$

Proposition. 1. $\mathbb{P}(\mathcal{D}) = 0$.

Démonstration. Écrivons

$$\mathcal{D} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \mathcal{D}_m$$

où

$$\mathcal{D}_m = \left\{ \frac{p}{2^m} : p \in \llbracket 1, 2^m - 1 \rrbracket \right\}$$

est un ensemble fini. L'ensemble $\mathcal{D}$, union dénombrable d'ensembles finis, est donc lui aussi dénombrable, d'où $\mathbb{P}(\mathcal{D}) = 0$. $\square$

Pour dire les choses de façon plus probabiliste, l'ensemble $\mathcal{D}$ est *négligeable* : un réel de $[0, 1]$ possède presque sûrement un unique développement binaire.

3 Une suite de parties de Ω

Pour tout $n \geq 1$, soit A_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ possédant au moins un développement binaire dont le n^{e} chiffre est égal à 1. On a

$$A_1 = \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

En effet, soit $\omega \in \Omega$. Si $\omega > 1/2$, le premier chiffre de tous les développements binaires de ω est égal à 1, donc $\omega \in A_1$. Si $\omega < 1/2$, le premier chiffre des développements binaires de ω est égal à 0, donc $\omega \notin A_1$. Enfin,

$$\frac{1}{2} = 0.1000 \dots = 0.0111 \dots$$

Le premier développement binaire a son premier chiffre égal à 1, donc $1/2 \in A_1$. De même,

$$A_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1 \right]$$

$$A_3 = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right] \cup \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4} \right] \cup \left[\frac{7}{8}, 1 \right]$$

$$A_4 = \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{8} \right] \cup \left[\frac{3}{16}, \frac{1}{4} \right] \cup \left[\frac{5}{16}, \frac{3}{8} \right] \cup \left[\frac{7}{16}, \frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{9}{16}, \frac{5}{8} \right] \cup \left[\frac{11}{16}, \frac{3}{4} \right] \cup \left[\frac{13}{16}, \frac{7}{8} \right] \cup \left[\frac{15}{16}, 1 \right]$$

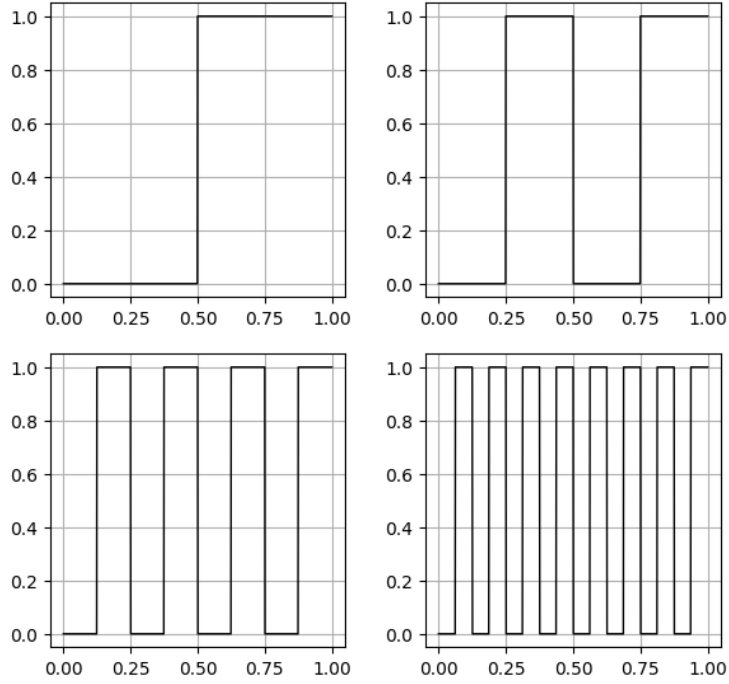


FIGURE 1 – Les fonctions indicatrices de A_1 , A_2 , A_3 et A_4

Proposition. 2. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n} \right]$$

Démonstration. Soit $n \geq 1$. Soit $\omega \in \Omega$. On a $\omega \in A_n$ si et seulement si ω est de la forme

$$\omega = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$$

où $n \geq 1$ et les a_k appartiennent à $\{0, 1\}$. Le réel ω s'écrit donc

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^{n-1-k} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k-n}} \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-1-k} 2^k + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{\alpha}{2^{n-1}} + \frac{\beta}{2^n} \end{aligned}$$

Lorsque ω décrit A_n , α décrit l'ensemble $\llbracket 0, 2^{n-1} - 1 \rrbracket$ et β décrit $[0, 1]$. On a donc

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \llbracket 0, 2^{n-1} - 1 \rrbracket + \frac{1}{2^n} [0, 1] \\ &= \left\{ \frac{2k+1}{2^n} : k \in \llbracket 0, 2^{n-1} - 1 \rrbracket \right\} + \left[0, \frac{1}{2^n} \right] \\ &= \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left[\frac{2k+1}{2^{n-1}}, \frac{2k+2}{2^n} \right] \end{aligned}$$

□

Proposition. 3. *Pour tout $n \geq 1$, $A_n \in \mathcal{B}$.*

Démonstration. Les ensembles A_n sont des réunions finies de segments et les segments appartiennent à la tribu $\mathcal{B}$ des boréliens. □

Proposition. 4. *Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(A_n) = 1/2$.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$. L'ensemble A_n est une union finie de segments *disjoints*. On a donc

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \mathbb{P} \left(\left[\frac{2k+1}{2^{n-1}}, \frac{2k+2}{2^n} \right] \right) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

□

4 Intersections et réunions

Cette section n'est pas utile à notre objectif qui est de construire une suite de variables aléatoires indépendantes, mais elle nous permettra de nous familiariser avec les ensembles A_k . Nous allons nous intéresser à quelques intersections et réunions relatives à ceux-ci. Quels sont les réels $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à tous les A_k ? À au moins un des A_k ? À tous les A_k pour k assez grand? À une infinité de A_k ?

Commençons par « au moins un ».

Proposition. 5.

$$\bigcup_{k \geq 1} A_k =]0, 1]$$

Démonstration. Clairement, $0 = 0.000\dots$ n'appartient à aucun des A_k . Inversement, soit $\omega \in]0, 1]$. Comme $\omega \neq 0$, tous les développements binaires de ω ont au moins un chiffre égal à 1, donc ω est dans la réunion des A_k . □

Passons à « tous ».

Proposition. 6.

$$\bigcap_{k \geq 1} A_k = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots, 1 \right\} = \left\{ 1 - \frac{1}{2^m} : m \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{1\}$$

Démonstration. Tout d'abord, $1 = 0.111\dots$ appartient à tous les A_k . Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$1 - \frac{1}{2^m} = 0.1\dots 101\dots$$

où le zéro est en position m . Donc, pour tout $k \neq m$, $1 - 1/2^m \in A_k$. On a aussi

$$1 - \frac{1}{2^m} = 0.1\dots 110\dots$$

où les zéros commencent en position $m+1$. Le m^{e} chiffre de ce développement est égal à 1, donc on a aussi $1 - 1/2^m \in A_m$.

Inversement, soit $\omega \in \Omega$. Supposons d'abord que $\omega \notin \mathcal{D}$. Le réel ω s'écrit de façon unique

$$\omega = 0.a_1a_2a_3\dots$$

Si $\omega \neq 1$, il existe $k \geq 1$ tel que $a_k = 0$, et donc (par unicité du développement binaire) $\omega \notin A_k$. Le réel ω n'est donc pas dans l'intersection des A_k . Supposons maintenant $\omega \in \mathcal{D}$. Le réel ω possède exactement deux développements binaires, qui sont de la forme

$$\omega = 0.a_1\dots a_{m-1}1000\dots = 0.a_1\dots a_{m-1}0111\dots$$

où $a_1, \dots, a_{m-1} \in \{0, 1\}$. Si ω n'est pas de la forme $1 - 1/2^m$, il existe $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ tel que $a_k = 0$, et donc $\omega \notin A_k$. $\square$

Regardons maintenant « une infinité de A_k ». Ce qui nous intéresse ici est la *limite supérieure* des A_m :

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} A_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$$

Proposition. 7.

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} A_m =]0, 1]$$

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega$ différent de 0. Si $\omega \notin \mathcal{D}$, son développement binaire ne finit pas par une infinité de zéros. Pour tout $m \geq 1$, il existe donc $k \geq m$ tel que le k^{e} chiffre du développement binaire de ω soit égal à 1. Dit autrement, pour tout $m \geq 1$,

$$\omega \in \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$$

Si $\omega \in \mathcal{D}$, alors l'un des développements binaires de ω finit par une infinité de 1. On arrive donc à la même conclusion. Ainsi,

$$]0, 1] \subseteq \limsup_{m \rightarrow \infty} A_m$$

L'inclusion réciproque est évidente. $\square$

Regardons enfin « tous les A_k pour k assez grand ». Il s'agit de la *limite inférieure* des A_m :

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} A_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k$$

Proposition. 8.

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} A_m = \mathcal{D} \cup \{1\}$$

Démonstration. Clairement, $1 = 0.111 \dots$ appartient à l'ensemble de gauche et 0 n'y est pas. Soit $\omega \in \Omega$ différent de 0 et 1. Si $\omega \notin \mathcal{D}$, son développement binaire ne finit pas par une infinité de 1. Pour tout $m \geq 1$, il existe donc $k \geq m$ tel que le k^{e} chiffre du développement binaire de ω soit égal à 0. Dit autrement, pour tout $m \geq 1$,

$$\omega \notin \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k$$

Ainsi, $\omega \notin \liminf_{m \rightarrow \infty} A_m$.

Si $\omega \in \mathcal{D}$, ω possède un développement binaire qui finit par une infinité de 1. Autrement dit, il existe $m \geq 1$ tel que

$$\omega \in \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k$$

Ainsi,

$$\mathcal{D} \subseteq \liminf_{m \rightarrow \infty} A_m$$

$\square$

Conclusion. Nous retrouvons évidemment dans ce cas particulier des inclusions qui sont toujours vérifiées. Remarquons qu'ici certaines inclusions sont strictes.

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \subsetneq \liminf_{m \rightarrow \infty} A_m \subsetneq \limsup_{m \rightarrow \infty} A_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$$

5 Une suite de variables aléatoires

Pour tout $n \geq 1$, soit $X_n : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$ la fonction indicatrice de A_n . La fonction X_n est mesurable puisque A_n l'est. Nous venons donc de définir une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur Ω , à valeurs dans $\{0, 1\}$. Les X_n sont ainsi des variables de Bernoulli.

Pour tout $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{D}$, $X_n(\omega) = 1$ si le n^{e} chiffre du développement binaire (unique) de ω est égal à 1. Dit plus simplement, $X_n(\omega)$ est le n^{e} chiffre du développement binaire de ω .

Si, au contraire, $\omega \in \mathcal{D}$, $X_n(\omega)$ est le n^{e} chiffre d'au moins *un des deux* développements binaires de ω (mais on ne sait pas duquel). On a par exemple $X_1(1/2) = 1$ (parce que $1/2 = 0.1000\dots$) et aussi $X_2(1/2) = 1$ (parce que $1/2 = 0.0111\dots$). En revanche, *aucun* développement binaire de $1/2$ ne s'écrit $0.11\dots$

Proposition. 9. Pour tout $n \geq 1$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Démonstration. Soit $n \geq 1$. En tant que fonction indicatrice, X_n suit une loi de Bernoulli. Le paramètre de cette loi est $\mathbb{P}(A_n) = 1/2$. $\square$

Proposition. 10. Les variables aléatoires X_n sont indépendantes.

Démonstration. Les variables aléatoires X_n étant discrètes, il nous suffit de montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = a_k)$$

Soit $n \geq 1$. Soient $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$. Posons

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}$$

Considérons l'événement

$$A = \{X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n\}$$

Comme $\mathbb{P}(\mathcal{D}) = 0$, on a aussi $\mathbb{P}(A \cap \mathcal{D}) = 0$. De là,

$$\mathbb{P}(A \setminus \mathcal{D}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap \mathcal{D}) = \mathbb{P}(A)$$

Travaillons donc plutôt sur $A \setminus \mathcal{D}$ pour éviter les soucis que nous avons évoqués plus haut.

Soit $\omega \in \Omega$. On a $\omega \in A \setminus \mathcal{D}$ si et seulement si $\omega \notin \mathcal{D}$ et est de la forme

$$\omega = \alpha + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} = \alpha + \frac{\beta}{2^n}$$

où $\beta \in [0, 1]$. Ainsi,

$$A \setminus \mathcal{D} = \left[\alpha, \alpha + \frac{1}{2^n} \right] \setminus \mathcal{D}$$

et donc (en réutilisant $\mu(\mathcal{D}) = 0$),

$$\mathbb{P}(A) = \mu(A \setminus \mathcal{D}) = \mathbb{P}\left(\left[\alpha, \alpha + \frac{1}{2^n} \right]\right) = \frac{1}{2^n}$$

Il reste à remarquer que comme $X_1, \dots, X_n$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, on a pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_k = a_k) = 1/2$ et donc

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = a_k) = \frac{1}{2^n} = \mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n)$$

□