

Les tribus sur un univers dénombrable

Marc Lorenzi

10 juillet 2026

Résumé

Déterminer toutes les tribus sur un univers quelconque est un problème difficile. Nous allons dans cet article montrer que si l'univers Ω est fini ou dénombrable, il est possible de caractériser complètement les tribus sur Ω . Nous allons plus précisément construire une bijection explicite entre l'ensemble des partitions de Ω et l'ensemble des tribus sur Ω .

1 Quelques rappels

1.1 Notion de tribu

Définition 1. Un *univers* est un ensemble non vide.

Une *tribu*, ou σ -*algèbre*, sur l'univers Ω est un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de Ω vérifiant

- (i) Non vide : $\mathcal{T} \neq \emptyset$.
- (ii) Stabilité par union dénombrable : pour toute suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, l'ensemble $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ appartient à $\mathcal{T}$.
- (iii) Stabilité par passage au complémentaire : pour tout $A \in \mathcal{T}$, le complémentaire A^c de A appartient à $\mathcal{T}$.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les *événements*. En probabilités, on rajoute fréquemment la propriété

- (ε) Pour tout $a \in \Omega$, $\{a\} \in \mathcal{T}$.

Les singletons $\{a\}$ sont les *événements élémentaires*. Dans la suite, lorsque la propriété (ε) est vérifiée, nous le dirons explicitement.

Exemple. L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de l'univers Ω est une tribu. Nous verrons un peu plus loin que si Ω est fini ou dénombrable, c'est la seule tribu sur Ω qui vérifie (ε).

1.2 Propriétés

Les propriétés (i) à (iii) entraînent un certain nombre de propriétés de stabilité. Donnons-nous une tribu $\mathcal{T}$ sur l'univers Ω .

Proposition 1. $\Omega \in \mathcal{T}$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$.

Démonstration. Par (i), il existe $A \in \mathcal{T}$. Considérons la suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie par $A_0 = A^c$ et pour tout $i \geq 1$, $A_i = A$. Par (iii), $A_0 \in \mathcal{T}$. Par (ii),

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = A_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A^c \cup A = \Omega \in \mathcal{E}$$

En réutilisant (iii), $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{T}$. $\square$

Proposition 2. $\mathcal{T}$ est stable par union finie.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{T}$. Pour tout $i \geq n$, posons $A_i = \emptyset$. La famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, donc sa réunion appartient à $\mathcal{T}$. Or,

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i \right) \cup \emptyset = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$$

$\square$

Proposition 3. $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable et intersection finie.

Démonstration. Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements. Par (ii) et (iii),

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i^c \right)^c \in \mathcal{T}$$

On fait de même pour les intersections finies en utilisant la proposition 2. $\square$

Proposition 4. Si $A, B \in \mathcal{T}$, alors $B - A \in \mathcal{T}$.

Démonstration. En effet, $B - A = B \cap A^c$. $\square$

Proposition 5. Si $A, B \in \mathcal{T}$, alors la différence symétrique de A et B appartient à $\mathcal{E}$.

Démonstration. La différence symétrique de A et B est

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$\mathcal{E}$ est stable par réunion finie et différence, donc $A \Delta B \in \mathcal{T}$. $\square$

1.3 Tribu engendrée

Proposition 6. *Soit Ω un univers. Toute intersection de tribus sur Ω est encore une tribu sur Ω .*

Démonstration. Soit $(\mathcal{T}_k)_{k \in K}$ une famille de tribus sur Ω . Posons $\mathcal{T} = \bigcap_{k \in K} \mathcal{T}_k$.

L'univers Ω appartient à tous les $\mathcal{T}_k$, donc $\Omega \in \mathcal{T}$. Ainsi, $\mathcal{T} \neq \emptyset$.

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Soit $k \in K$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{T}_k$. Comme $\mathcal{T}_k$ est une tribu, $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{T}_k$. Ainsi, $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{T}$.

Soit enfin $A \in \mathcal{T}$. Pour tout $k \in K$, $A \in \mathcal{T}_k$ donc $A^c \in \mathcal{T}_k$. De là, $A^c \in \mathcal{T}$. $\square$

Proposition 7. *Soit P un ensemble de parties de l'univers Ω . L'intersection de toutes les tribus sur Ω contenant P est encore une tribu sur Ω qui contient P . C'est la plus petite tribu vérifiant cette propriété.*

Démonstration. Immédiat. $\square$

Définition 2. On appelle cette tribu la *tribu engendrée par P* et on la note $\mathcal{T}(P)$.

Décrire précisément les éléments de $\mathcal{T}(P)$ est un problème en général difficile. Dans la section suivante, nous examinons un cas particulier, celui où l'univers Ω est dénombrable et P est une *partition* de Ω .

2 Le cas des univers dénombrables

Dans ce qui suit, nous dirons pour simplifier qu'un ensemble est dénombrable lorsqu'il est *fini ou dénombrable*. Nous ne ferons la distinction que lorsqu'elle s'avère indispensable, par exemple lorsque nous nous occuperons de cardinaux.

2.1 Un cas particulier

Proposition 8. *Soit Ω un univers dénombrable. La seule tribu sur Ω qui vérifie (ε) est $\mathcal{P}(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω qui vérifie (ε) . Pour tout $A \subseteq \Omega$, l'ensemble A est fini ou dénombrable. Écrivons

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$

Par (ε) les singletons appartiennent à $\mathcal{T}$, donc $A \in \mathcal{T}$. Ainsi, $\mathcal{P}(\Omega) \subseteq \mathcal{T}$. L'inclusion réciproque est évidente. $\square$

2.2 Le cas général

Si l'on ne suppose pas (ε) , quelles sont les tribus sur un univers Ω dénombrable? Nous allons voir qu'il y en a beaucoup.

Soit $P = \{C_j : j \in F\}$ une *partition* de Ω , c'est à dire que les C_j sont non vides, disjoints, et leur réunion est égale à Ω . Remarquons que comme Ω est dénombrable, les ensembles C_j , et surtout l'ensemble F , sont dénombrables. La dénombrabilité de F sera essentielle dans ce qui va suivre.

Proposition 9.

$$\mathcal{T}(P) = \left\{ \bigcup_{j \in J} C_j : J \subseteq F \right\}$$

Exemple. En prenant $P = \{\Omega\}$, on a $\mathcal{T}(P) = \{\emptyset, \Omega\}$. En choisissant une partie non vide A de Ω et en prenant $P = \{A, A^c\}$, on a $\mathcal{T}(P) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$. En prenant une partition $P = \{A, B, C\}$ de cardinal 3, on a

$$\mathcal{T}(P) = \{\emptyset, A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C, \Omega\}$$

En prenant $P = \{\{a\} : a \in \Omega\}$, on obtient $\mathcal{T}(P) = \mathcal{P}(\Omega)$.

Démonstration. Notons

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{j \in J} C_j : J \subseteq F \right\}$$

La tribu $\mathcal{T}(P)$ engendrée par P contient les C_j . Comme F est dénombrable, toute partie J de F l'est aussi. Par stabilité par réunion finie ou dénombrable, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(P)$.

Montrons que $\mathcal{T}$ est une tribu. Par la minimalité de $\mathcal{T}(P)$ nous aurons le résultat.

L'ensemble $\mathcal{T}$ contient les C_j (prendre $J = \{j\}$), donc $\mathcal{T} \neq \emptyset$. Ou, plus simplement, prendre $J = \emptyset$ est constater que $\emptyset \in \mathcal{T}$. Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Pour tout $i \in I$,

$$A_i = \bigcup_{j \in J_i} C_j$$

où $J_i \subseteq F$. On a alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} C_j = \bigcup_{j \in J} C_j$$

où

$$J = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_i$$

Ainsi, la réunion des A_i appartient à $\mathcal{T}$. Enfin, soit $A \in \mathcal{T}$. Soit $J \subseteq \mathbb{N}$ tel que $A = \bigcup_{j \in J} C_j$. Comme les C_j forment une partition de Ω , on a

$$A^c = \bigcup_{j \in F-J} C_j \in \mathcal{T}$$

□

2.3 Une bijection

Proposition 10. Soit $P = (C_j)_{j \in F}$ une partition de l'univers dénombrable Ω . La fonction

$$\varphi : J \mapsto \bigcup_{j \in J} C_j$$

est une bijection de $\mathcal{P}(F)$ sur $\mathcal{T}(P)$.

Démonstration. Par la proposition 9, pour tout $J \subseteq F$, $\varphi(J) \in \mathcal{T}(P)$. Cette même proposition montre que φ est surjective. Enfin, comme P est une *partition* de Ω , toute ensemble $A \in \mathcal{T}(P)$ de F s'écrit *de façon unique* sous la forme $A = \bigcup_{j \in J} C_j$ où $J \subseteq F$. $\square$

Corollaire 11. Si F est fini, de cardinal n , alors $\mathcal{T}(P)$ est fini, de cardinal 2^n . Si F est infini (dénombrable), alors $\mathcal{T}(P)$ est infini, de cardinal $2^{\aleph_0}$.

Démonstration. En effet, par la proposition 10,

$$|\mathcal{T}(P)| = |\mathcal{P}(F)| = 2^{|F|}$$

$\square$

2.4 Une description de toutes les tribus

Notons $\mathfrak{T}(\Omega)$ l'ensemble des tribus sur l'univers dénombrable Ω . Notons également $\Pi(\Omega)$ l'ensemble des partitions de Ω . Considérons l'application $\Phi : \Pi(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{T}(\Omega)$ définie par

$$\Phi(P) = \mathcal{T}(P)$$

Nous allons consacrer le reste de l'article à prouver que Φ est une bijection. Procédons par étapes.

Proposition 12. Φ est injective.

Démonstration. Soient $P, P' \in \Pi(\Omega)$. Supposons $\Phi(P) = \Phi(P')$. Montrons que $P = P'$.

Soit $C \in P$. On a $C \in \mathcal{T}(P)$, donc $C \in \mathcal{T}(P')$. De là, C est une union (non vide) d'éléments de P' . Il existe donc $C' \in P'$ tel que $C' \subseteq C$. De même, il existe $C'' \in P$ tel que $C'' \subseteq C'$. On a donc $C'' \subseteq C$. Mais P est une partition de Ω , donc $C'' = C$, d'où $C = C' \in P'$. Ainsi, $P \subseteq P'$. De même, $P' \subseteq P$. $\square$

Nous allons maintenant montrer la surjectivité de Φ : si Ω est un univers dénombrable, toutes les tribus sur Ω sont de la forme $\mathcal{T}(P)$ où P est une partition de Ω .

Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur l'univers dénombrable Ω . Soient $x, y \in \Omega$. Deux cas surviennent.

- Cas 1, pour tout $A \in \mathcal{T}$, si $x \in A$ alors $y \in A$. Posons dans ce cas $L_{x,y} = \Omega$.
- Cas 2, il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $x \in A$ et $y \notin A$. Prenons un tel A et notons-le $L_{x,y}$.

Pour tout $x \in \Omega$, soit

$$C_x = \bigcap_{y \in \Omega} L_{x,y}$$

Pour dire les choses de façon plus imagée, si $y \in \Omega$ peut être *séparé* de x par un ensemble $A \in \mathcal{T}$, alors $y \notin C_x$. Dans le cas contraire, $y \in C_x$.

Lemme 13. *Pour tout $x \in \Omega$, C_x est le plus petit élément de $\mathcal{T}$ qui contient x .*

Démonstration. Clairement, $x \in C_x$. L'univers Ω est dénombrable et pour tout $y \in \Omega$, $L_{x,y}$ appartient à $\mathcal{T}$, donc $C_x \in \mathcal{T}$.

Soit $A \in \mathcal{T}$. Supposons que $x \in A$. Soit $y \notin A$. On est dans le cas 2 ci-dessus. On a alors $y \notin L_{x,y}$ donc, a fortiori, $y \notin C_x$. En contraposant, on obtient $C_x \subseteq A$. $\square$

Lemme 14. *Soit $P = \{C_x : x \in \Omega\}$. L'ensemble P est une partition de Ω .*

Démonstration. Pour tout $x \in \Omega$, $x \in C_x$ donc les C_x sont non vides et leur réunion est égale à Ω .

Soient $x, y \in \Omega$. Supposons que $y \in C_x$. Comme C_y est le plus petit élément de $\mathcal{T}$ contenant y et que $y \in C_x$, on a $C_y \subseteq C_x$. Supposons un instant que $x \notin C_y$. Soit $A = C_x - C_y$. On a $x \in A$, $A \in \mathcal{T}$ et $A \subsetneq C_x$. Contradiction, par minimalité de C_x . Ainsi, $x \in C_y$ d'où, comme dans la première partie de la preuve, $C_x \subseteq C_y$. Nous venons donc de montrer que pour tous $x, y \in \Omega$, si $y \in C_x$, alors $C_x = C_y$.

Soient $x, y \in \Omega$. Supposons $C_x \cap C_y \neq \emptyset$. Soit $z \in C_x \cap C_y$. On a $z \in C_x$, donc $C_z = C_x$. De même, $C_z = C_y$, d'où $C_x = C_y$. $\square$

Proposition 15. $\mathcal{T} = \mathcal{T}(P)$.

Démonstration. Les C_x appartiennent à $\mathcal{T}$. Par minimalité de $\mathcal{T}(P)$, on a donc $\mathcal{T}(P) \subseteq \mathcal{T}$. Inversement, soit $A \in \mathcal{T}$. On a

$$A = \bigcup_{x \in A} C_x$$

Comme Ω est dénombrable, la réunion ci-dessus est une union finie ou dénombrable, donc $A \in \mathcal{T}(P)$. $\square$

2.5 Combien de tribus ?

Combien y a-t-il de tribus sur un univers Ω fini ou dénombrable ? Ce qui précède montre que l'application $\Phi : P \mapsto \mathcal{T}(P)$ est une bijection de $\Pi(\Omega)$ sur $\mathfrak{T}(\Omega)$. Si Ω est fini, de cardinal n , alors le cardinal de l'ensemble des partitions de Ω est B_n , où B_n est le n^e nombre de Bell. Nous n'en dirons pas plus ici, le lecteur intéressé trouvera facilement de la documentation sur les nombres de Bell.

Proposition 16. *Si l'univers Ω est infini dénombrable, alors*

$$|\mathfrak{T}(\Omega)| = 2^{\aleph_0}$$

Démonstration. Comme $\mathfrak{T}(\Omega)$ est en bijection avec $\Pi(\Omega)$, il nous suffit de dénombrer l'ensemble $\Pi(\Omega)$ des partitions de Ω . Une partition étant un ensemble fini ou dénombrable, on a

$$\Pi(\Omega) \subseteq \mathcal{P}_\omega(\mathcal{P}(\Omega)) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(\mathcal{P}(\Omega))$$

où $\mathcal{P}_\omega(\mathcal{P}(\Omega))$ est l'ensemble des parties dénombrables de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n(\mathcal{P}(\Omega))$ est l'ensemble des parties de $\mathcal{P}(\Omega)$ finies, de cardinal n . On a

$$|\mathcal{P}_\omega(\mathcal{P}(\Omega))| \leq |\mathcal{P}(\Omega)|^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|\mathcal{P}_n(\mathcal{P}(\Omega))| \leq |\mathcal{P}(\Omega)|^n = 2^{n\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

De là,

$$|\Pi(\Omega)| \leq |\mathcal{P}_\omega(\mathcal{P}(\Omega))| + \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{P}_n(\mathcal{P}(\Omega))| \leq \aleph_0 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Montrons maintenant l'inégalité inverse. Soit $x_0 \in \Omega$. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω non vides, différentes de Ω et contenant x_0 . On vérifie facilement que $|\mathcal{A}| = 2^{\aleph_0}$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, posons $P_A = \{A, A^c\}$. L'ensemble P_A est une partition de Ω (de cardinal 2). Remarquons que si $A, A' \in \mathcal{A}$ vérifient $P_A = P_{A'}$, alors $\{A, A^c\} = \{A', A'^c\}$. On a donc $A = A'$ ou $A = A'^c$. Mais $x_0 \in A$ et $x_0 \notin A'^c$, donc $A \neq A'^c$. Ainsi, $A = A'$. L'application $A \mapsto P_A$ est donc une injection de $\mathcal{A}$ dans $\Pi(\Omega)$. On en déduit

$$|\Pi(\Omega)| \geq |\mathcal{A}| = 2^{\aleph_0}$$

□