

Un univers explicite pour une chaîne de Markov

Marc Lorenzi

9 avril 2026

1 Motivation

Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une suite $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ordinateurs. L'ordinateur O_0 envoie un bit à l'ordinateur O_1 . Celui-ci le réexpédie à O_2 , etc. Le souci est que le canal de transmission n'est pas fiable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le bit expédié par O_n à O_{n+1} a une probabilité p d'être inversé (0 devient 1 ou 1 devient 0).

Le problème est le suivant. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité que le bit reçu par O_n soit le bit envoyé par O_0 ?

Ce problème est plus facile à appréhender en considérant des suites de variables aléatoires. On dispose d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ et d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur Ω , à valeurs dans l'ensemble $S = \{0, 1\}$. La variable aléatoire X_n modélise le bit transmis par l'ordinateur O_n . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = 1 | X_{n-1} = 1) &= 1 - p \\ \mathbb{P}(X_n = 0 | X_{n-1} = 0) &= 1 - p \\ \mathbb{P}(X_n = 1 | X_{n-1} = 0) &= p \\ \mathbb{P}(X_n = 0 | X_{n-1} = 1) &= p\end{aligned}$$

La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *chaîne de Markov*.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

La matrice A est la *matrice de transition* de notre chaîne de Markov. On vérifie facilement que les valeurs propres de A sont 1 (vecteur propre $(1 \ 1)^T$) et $1 - 2p$ (vecteur propre $(1 \ -1)^T$). En notant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2p \end{pmatrix}$$

on a donc

$$A = PDP^{-1}$$

Soient $\alpha_0 = \mathbb{P}(X_0 = 0)$ et $\alpha_1 = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1 - \alpha_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) & \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}^T$$

Par le théorème des probabilités totales, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = AY_n$. On en déduit

$$Y_n = A^n Y_0 = A^n \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = PD^n P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Comme $p \in]0, 1[$, $1 - 2p \in]-1, 1[$. Lorsque n tend vers l'infini, $(1 - 2p)^n$ tend vers 0. De là,

$$D^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Problème. Dans ce qui précède, on admet l'existence d'un espace probabilisé dans lequel existe une telle chaîne de Markov. Il existe des résultats très généraux qui prouvent l'existence de cet espace. Dans ce qui suit, nous allons construire plus ou moins explicitement l'espace $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$, ainsi que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La construction est inspirée du livre de Patrick Billingsley *Probability and Measure* (Anniversary Edition, Wiley 2012). Je cite :

THEOREM 8.1

Suppose that $P = [p_{ij}]$ is a stochastic matrix and that α_i are nonnegative numbers satisfying $\sum_{i \in S} \alpha_i = 1$. There exists on some $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a Markov chain $X_0, X_1, X_2, \dots$ with initial probabilities α_i and transition probabilities p_{ij} .

2 Une construction explicite

Rappelons que $p \in]0, 1[$, $S = \{0, 1\}$ et $\alpha_0, \alpha_1 \in [0, 1]$ vérifient $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$. Notons $p_{0,0} = p_{1,1} = 1 - p$ et $p_{0,1} = p_{1,0} = p$.

On se place dans l'univers $\Omega =]0, 1]$, muni de la tribu $\mathfrak{T}$ des boréliens et de la mesure de Lebesgue $\mathbb{P}$.

- On construit une partition $(I_i^{(0)})_{i \in S}$ de Ω où les $I_i^{(0)}$ sont des intervalles tels que pour tout $i \in S$, $\mathbb{P}(I_i^{(0)}) = \alpha_i$. Cette longue phrase pour dire, dans notre exemple très simple, qu'on coupe Ω en 2. Par exemple, $I_0^{(0)} =]0, \alpha_0]$ et $I_1^{(0)} =]\alpha_0, 1]$.
- Pour tout $i \in S$, on décompose chacun des $I_i^{(0)}$ en deux sous-intervalles $I_{ij}^{(1)}$, $j \in S$, de longueurs $\alpha_i p_{ij}$.
- Pour tous $i, j \in S$, on décompose chacun des $I_{ij}^{(1)}$ en deux sous-intervalles $I_{ijk}^{(2)}$, $k \in S$, de longueurs $\alpha_i p_{ij} p_{jk}$.
- Par récurrence, on construit pour tout $n \in \mathbb{N}$ une partition $\mathcal{P}_n = (I_{i_0 \dots i_n}^{(n)})_{i_0, \dots, i_n \in S}$ de Ω vérifiant
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{n+1}$ est un raffinement de $\mathcal{P}_n$. Plus explicitement, pour tous $i_0, \dots, i_{n-1} \in S$, $(I_{i_0 \dots i_n}^{(n)})_{i_n \in S}$ est une partition de $I_{i_0 \dots i_{n-1}}^{(n-1)}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $i_0, \dots, i_n \in S$,

$$\mathbb{P}(I_{i_0 \dots i_n}^{(n)}) = \alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}$$

Définissons maintenant une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires, où $X_n : \Omega \longrightarrow S$. Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $i \in S$, posons

$$X_n(\omega) = i \text{ si } \omega \in \bigcup_{i_0, \dots, i_{n-1} \in S} I_{i_0 \dots i_{n-1} i}^{(n)}$$

Les X_n sont bien mesurables car les réunions (finies ici) d'intervalles sont des boréliens.

Proposition 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $i_0, \dots, i_n \in S$, on a l'égalité d'événements*

$$\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} = I_{i_0 \dots i_n}^{(n)}$$

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur n . Soit $i_0 \in S$. Soit $\omega \in \Omega$. On a $\omega \in \{X_0 = i_0\}$ si et seulement si $X_0(\omega) = i_0$, c'est à dire $X_0(\omega) \in I_{i_0}^{(0)}$

Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vérifiée par $n - 1$. Soient $i_0, \dots, i_n \in S$. Soit $\omega \in \Omega$. On a

$$\begin{aligned} \{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} &= \{X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\} \cap \{X_n = i_n\} \\ &=_{H.R.} I_{i_0 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} \cap \{X_n = i_n\} \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\{X_n = i_n\} = \bigcup_{i'_0, \dots, i'_{n-1} \in S} I_{i'_0 \dots i'_{n-1} i_n}^{(n)}$$

Si l'un des i'_j est différent de i_j , alors

$$I_{i'_0 \dots i'_{n-1} i_n}^{(n)} \cap I_{i_0 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} = \emptyset$$

Ceci vient du fait que la partition $\mathcal{P}_n$ est un *raffinement* de la partition $\mathcal{P}_{n-1}$. On a donc, toujours par la propriété de raffinement,

$$\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} = I_{i_0 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} \cap I_{i_0 \dots i_{n-1} i_n}^{(n)} = I_{i_0 \dots i_{n-1} i_n}^{(n)}$$

□

Proposition 2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $i_0, \dots, i_n \in S$,*

$$\mathbb{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) = p_{i_{n-1} i_n}$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, \dots, i_n \in S$. On a

$$\{X_n = i_n\} \cap \{X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\} = \{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} = I_{i_0 \dots i_{n-1} i_n}^{(n)}$$

De là,

$$\mathbb{P}(\{X_n = i_n\} \cap \{X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\}) = \alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}$$

De plus,

$$\mathbb{P}(\{X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\}) = \alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-2} i_{n-1}}$$

et donc, en faisant le quotient,

$$\mathbb{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = \frac{\alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}}{\alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-2} i_{n-1}}} = p_{i_{n-1} i_n}$$

Passons à la deuxième égalité. Par le théorème des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) &= \sum_{i_0, \dots, i_{n-2} \in S} \mathbb{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \times \\ &\quad \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-2} = i_{n-2}) \\ &= p_{i_{n-1} i_n} \sum_{i_0, \dots, i_{n-2} \in S} \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-2} = i_{n-2}) \end{aligned}$$

La somme ci-dessus est égale à 1 car on a l'union disjointe

$$\bigcup_{i_0, \dots, i_{n-2} \in S} \{X_0 = i_0, \dots, X_{n-2} = i_{n-2}\} = \bigcup_{i_0, \dots, i_{n-2} \in S} I_{i_0 \dots i_{n-2}}^{(n-2)} = \Omega$$

□

Remarque finale. Billingsley propose dans l'un des exercices une autre construction. Au lieu de se placer dans l'univers $\Omega =]0, 1]$, il considère l'univers S^∞ des suites à valeurs dans S . Il signale que cette construction ne fonctionne que si S est un ensemble fini (ce qui est le cas dans notre exemple, où S est de cardinal 2).