

Variables de Bernoulli indépendantes et taille de l'univers

Marc Lorenzi

1er mai 2026

Dans toute la suite, on note $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1 Existence de variables de Bernoulli indépendantes

Proposition 1. *Soit $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose qu'il existe n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ définies sur Ω , à valeurs dans $\mathbb{B}$, qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p . On a alors $|\Omega| \geq 2^n$.*

Démonstration. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}^n$, posons

$$A_x = \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$$

Par l'indépendance des X_i ,

$$\mathbb{P}(A_x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_i = x_i) = p$ ou $1 - p$, donc est non nul. De là, $\mathbb{P}(A_x) \neq 0$ et donc $A_x \neq \emptyset$. Soit l'événement

$$A = \bigcup_{x \in \mathbb{B}^n} A_x$$

Les événements A_x sont disjoints deux à deux, donc

$$|A| = \sum_{x \in \mathbb{B}^n} |A_x| \geq |\mathbb{B}^n| = 2^n$$

d'où le résultat puisque $A \subseteq \Omega$. $\square$

Remarque. Dans ce qui précède, il était nécessaire de prendre $p \neq 0, 1$. En effet, supposons par exemple $p = 0$. Soit $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $X(x) = 0$. La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $X_i = X$. On a alors pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{B}$, $\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \emptyset$ si l'un des x_i est non nul et Ω sinon. De là,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \delta_{x_1, 0} \dots \delta_{x_n, 0} = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Ainsi, sans aucune hypothèse sur le cardinal de Ω , les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0)$.

2 Optimalité

Nous allons maintenant montrer que le minorant 2^n est optimal. Posons $\Omega = \mathbb{B}^n$. Soit $\mathbb{P}_0$ la probabilité sur $\mathbb{B}$ définie par $\mathbb{P}_0(\{0\}) = 1 - p$ et $\mathbb{P}_0(\{1\}) = p$. Munissons Ω de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité produit $\mathbb{P}$. Cette probabilité est l'unique probabilité sur Ω qui vérifie pour tous événements $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{B}$,

$$\mathbb{P}(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_0(A_i)$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{B}$ la variable aléatoire définie par $X_i(x) = x_i$.

Proposition 2. *Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ suivent la loi $\mathcal{B}(p)$ et sont indépendantes.*

Démonstration. Soient $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{B}$. On a le pléonasme

$$\{X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n\} = \{x \in \Omega : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\} = A_1 \times \dots \times A_n$$

De là (probabilité produit),

$$(\star) \quad \mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_0(A_i)$$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Prenons pour tout $i \neq j$, $A_i = \mathbb{B}$, de sorte que $\mathbb{P}_0(A_i) = 1$. On a alors

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{P}_0(A_i) = \mathbb{P}_0(A_j)$$

Par ailleurs,

$$\{X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n\} = \{X_j \in A_j\}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_j \in A_j) = \mathbb{P}_0(A_j)$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}_0(\{1\}) = p$$

et

$$\mathbb{P}(X_j = 0) = \mathbb{P}_0(\{0\}) = 1 - p$$

Ainsi, X_j suit la loi de Bernoulli de paramètre p . De plus, pour tous $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{B}$, l'égalité $(\star)$ s'écrit maintenant

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Ainsi, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes. $\square$