

La taille de l'univers

Marc Lorenzi

26 avril 2026

Résumé

Sauf dans des cas triviaux, l'existence d'une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi définies sur un même univers entraîne la non-dénombrabilité de l'univers.

1 Introduction

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire définie sur Ω , à valeurs dans un espace probabilisable $(E, \mathcal{T}')$. Rappelons que cela signifie que pour tout $A \in \mathcal{T}'$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. L'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$. La probabilité de ce dernier événement est notée $\mathbb{P}(X \in A)$.

2 Variables aléatoires presque sûrement constantes

2.1 Introduction

La variable aléatoire X est *presque constante* s'il existe $c \in E$ tel que $\mathbb{P}(X \in \{c\}) = 1$. Pour que ceci ait un sens, encore faut-il que l'ensemble $\{X \in \{c\}\}$ appartienne à $\mathcal{T}$. Pour cela, nous devons supposer que $\{c\} \in \mathcal{T}'$. Nous allons donc supposer dans cette section et la suivante que la tribu $\mathcal{T}'$ contient les singletons. Pour tout $x \in E$, nous notons assez classiquement

$$\{X = x\} = \{X \in \{x\}\}$$

Posons

$$q = \sup\{\mathbb{P}(X = x) : x \in E\} \in [0, 1]$$

2.2 Quand a-t-on $q = 1$?

Proposition 1. *La variable aléatoire X est presque sûrement constante si et seulement si $q = 1$.*

Démonstration. Si X est presque sûrement constante, égale à $c \in E$, alors $\mathbb{P}(X = c) = 1$, donc $q \geq 1$. Or, $q \leq 1$ donc $q = 1$.

Inversement, supposons $q = 1$. Par définition d'une borne supérieure, pour tout $n \geq 2$, il existe $x_n \in E$ tel que

$$1 - \frac{1}{n} < \mathbb{P}(X = x_n) \leq 1$$

Pour tout $x \in E$ différent de x_n ,

$$\{X = x\} \cap \{X = x_n\} = \emptyset$$

et donc

$$\mathbb{P}(X = x) + \mathbb{P}(X = x_n) = \mathbb{P}(\{X = x\} \cup \{X = x_n\}) \leq 1$$

d'où

$$\mathbb{P}(X = x) \leq 1 - \mathbb{P}(X = x_n) < \frac{1}{n}$$

Prenons $n = 2$. Soit $m \geq 3$. Supposons $x_m \neq x_2$. On a $\mathbb{P}(X = x_m) < 1/2$, mais aussi $\mathbb{P}(X = x_m) > 2/3$, contradiction. Ainsi, pour tout $m \geq 2$, $x_m = x_2$. De là, pour tout $m \geq 2$,

$$1 - \frac{1}{m} < \mathbb{P}(X = x_m) = \mathbb{P}(X = x_2) \leq 1$$

En faisant tendre m vers l'infini, on en déduit $\mathbb{P}(X = x_2) = 1$. Ainsi, X est presque sûrement constante, égale à x_2 . $\square$

3 Une suite de variables aléatoires indépendantes

Dans cette section, nous supposons à nouveau que les singletons appartiennent à $\mathcal{T}'$.

Soit $\mathcal{F} = (X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur Ω , à valeurs dans E . On suppose que les X_i suivent la même loi que X .

3.1 Un cas trivial

Proposition 2. *Si X est presque sûrement constante, alors la famille $\mathcal{F}$ est indépendante.*

Démonstration. Supposons que X est presque sûrement constante, égale à $c \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $x_1, \dots, x_n \in E$, on a l'égalité d'événements

$$\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\}$$

Les événements $\{X_i = x_i\}$ sont de probabilité 1 si $x_i = c$ et de probabilité 0 sinon. Si l'un des x_i est différent de c , alors la probabilité de l'intersection est nulle. Si, au contraire, tous les x_i sont égaux à c alors, classiquement la probabilité de l'intersection est égale à 1. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \delta_{x_1 c} \dots \delta_{x_n c} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ est indépendante. $\square$

3.2 Le cas intéressant

Nous allons maintenant regarder ce que l'on peut dire de l'univers Ω lorsque X n'est pas presque sûrement constante. En particulier, que dire des probabilités des singletons de Ω ? Bien entendu, il nous faut faire ici pour Ω l'hypothèse déjà faite sur E . Nous supposons dorénavant que les singletons $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$, appartiennent à $\mathcal{T}$.

Proposition 3. *On suppose que X n'est pas presque sûrement constante et $\mathcal{F}$ est indépendante. Pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0$.*

Démonstration. Comme montré plus haut, nous avons

$$q = \sup\{\mathbb{P}(X = x) : x \in E\} < 1$$

Soit $\omega \in \Omega$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, posons $x_i = X_i(\omega)$. Par l'indépendance de $\mathcal{F}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Remarquons que

$$\{\omega\} \subseteq \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) \leq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \leq q^n$$

Comme $0 \leq q < 1$, lorsque n tend vers l'infini, q^n tend vers 0, d'où le résultat. $\square$

3.3 La taille de l'univers

Nous voici arrivés au résultat qui nous intéresse. Rappelons que nous sommes toujours dans le cas où les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ contiennent les singletons.

Proposition 4. *On suppose que X n'est pas presque sûrement constante et $\mathcal{F}$ est indépendante. Alors, l'univers Ω est infini, non dénombrable.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{T}$. Supposons A fini ou dénombrable. On a l'union dénombrable disjointe

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

Par la σ -additivité de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 0$$

Or, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, donc $\Omega \neq A$. Ainsi, Ω est infini, non dénombrable. $\square$

4 Généralisation

4.1 Introduction

Que deviennent les résultats précédents lorsque les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ ne contiennent pas nécessairement les singletons ? Dorénavant, nous ne faisons plus ces deux hypothèses.

Nous allons ici encore montrer que s'il existe une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur Ω , de même loi, et que cette loi n'est pas « triviale », alors l'univers Ω est infini, non dénombrable. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde. Faisons l'hypothèse

(H) Ω est fini ou dénombrable.

Nous allons ici admettre le théorème suivant.

Proposition 5. *Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω . Il existe une unique partition $P = \{C_j : j \in F\}$ de Ω , où F est fini ou dénombrable, telle que pour tout événement $A \in \mathcal{T}$, il existe un unique ensemble $J \subseteq F$ tel que*

$$A = \bigcup_{j \in J} C_j$$

Les ensembles C_j sont les *atomes* de la tribu $\mathcal{T}$. Ils vont jouer le rôle que jouaient les singletons dans les sections précédentes.

Comme l'univers Ω est dénombrable, $X(\Omega)$ est aussi dénombrable. Pour simplifier les notations et en espérant ne pas nuire à la généralité, supposons dorénavant $E = X(\Omega)$. L'image d'un ensemble fini ou dénombrable par une application est encore un ensemble fini ou dénombrable. Il existe donc une partition $Q = \{D_j : j \in G\}$ de E , où G est fini ou dénombrable, telle que

$$\mathfrak{T}' = \left\{ \bigcup_{j \in J} D_j : J \subseteq G \right\}$$

avec, encore une fois, unicité de l'écriture des éléments de $\mathcal{T}'$ comme union disjointe d'éléments de Q .

4.2 Image d'un atome

La proposition suivante montre que la variable aléatoire X est incapable de discerner les éléments d'un atome C de $\mathcal{T}$: les images par X des éléments de C appartiennent toutes au même atome de $\mathcal{T}'$.

Proposition 6. *Soit $C \in P$. Il existe un et un seul $D \in Q$ tel que $X(C) \subseteq D$.*

Ou, si on préfère, $C \subseteq \{X \in D\}$.

Démonstration. (!) Supposons $C \subseteq \{X \in D\}$ et $C \subseteq \{X \in D'\}$ où $D, D' \in Q$. On a donc

$$\{X \in D \cap D'\} = \{X \in D\} \cap \{X \in D'\} \supseteq C \neq \emptyset$$

d'où $D \cap D' \neq \emptyset$. Comme Q est une partition de E , il vient $D = D'$.

($\exists$) Soit $\omega \in C$. Il existe (un unique) $D \in Q$ tel que $X(\omega) \in D$. Cet événement D dépend a priori de ω , mais nous allons voir que ce n'est pas le cas. On a $\{X \in D\} \in \mathcal{T}$ et donc $\{X \in D\} = \bigcup_{j \in J} C_j$ où $J \subseteq F$. Remarquons que $\omega \in C \cap \{X \in D\}$ et donc

$$C \cap \{X \in D\} \neq \emptyset$$

Il existe donc $j \in J$ tel que $C \cap C_j \neq \emptyset$. Mais les C_j sont disjoints deux à deux, il existe donc $j \in J$ tel que $C = C_j$. De là, $C \subseteq \{X \in D\}$. $\square$

Notation. Nous noterons dorénavant $D(X, C)$ l'unique $D \in Q$ tel que $C \subseteq \{X \in D\}$.

Posons

$$q = \sup\{\mathbb{P}(X \in D) : D \in Q\} \in [0, 1]$$

Exemple. Prenons $\Omega = \mathbb{R}$ et $E = [-1, 1]$. Soit $X : \Omega \rightarrow E$ définie par $X(\omega) = \sin \omega$. Soit $A = [0, 1]$. Munissons E de la tribu $\mathcal{T}' = \{\emptyset, A, A^c, E\}$. On a

$$\{X \in A\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi] = B$$

Si nous voulons que X soit une variable aléatoire, l'ensemble B doit appartenir à $\mathcal{T}$, ainsi que son complémentaire B^c . Ainsi, $\mathcal{T} \supseteq \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$.

4.3 La valeur de q

Proposition 7. $q = 1$ si et seulement si il existe $D \in Q$ tel que X appartient presque sûrement à D .

Plus explicitement, $\mathbb{P}(X \in D) = 1$ et pour tout $D' \in Q$ différent de D , $\mathbb{P}(X \in D') = 0$.

Démonstration. L'existence d'un tel D entraîne $\mathbb{P}(X \in D) = 1$ et donc $q = 1$.

Inversement, supposons $q = 1$. Pour tout $n \geq 2$, il existe $D_n \in Q$ tel que

$$1 - \frac{1}{n} < \mathbb{P}(X \in D_n) \leq 1$$

Pour tout $D \in Q$ différent de D_n , $D \cap D_n = \emptyset$ (partition), donc

$$\{X \in D\} \cap \{X \in D_n\} = \emptyset$$

De là,

$$\mathbb{P}(X \in D) + \mathbb{P}(X \in D_n) = \mathbb{P}(\{X \in D\} \cup \{X \in D_n\}) \leq 1$$

d'où

$$\mathbb{P}(X \in D) \leq 1 - \mathbb{P}(X \in D_n) < \frac{1}{n}$$

Prenons $n = 2$. Soit $m \geq 3$. Supposons $D_m \neq D_2$. On a $\mathbb{P}(X \in D_m) < 1/2$, mais aussi $\mathbb{P}(X \in D_m) > 2/3$, contradiction. Ainsi, pour tout $m \geq 2$, $D_m = D_2$. De là, pour tout $m \geq 2$,

$$1 - \frac{1}{m} < \mathbb{P}(X \in D_m) = \mathbb{P}(X \in D_2) \leq 1$$

En faisant tendre m vers l'infini, on en déduit $\mathbb{P}(X \in D_2) = 1$. Ainsi, X appartient presque sûrement à D_2 . $\square$

4.4 Le cas trivial

Proposition 8. *Si X appartient presque sûrement à un élément D de Q , alors la famille $\mathcal{F}$ est indépendante.*

Démonstration. Supposons que X appartient presque sûrement à un élément D de Q . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $D_1, \dots, D_n \in Q$, on a l'égalité d'événements

$$\{X_1 \in D_1, \dots, X_n \in D_n\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i \in D_i\}$$

Les événements $\{X_i \in D_i\}$ sont de probabilité 1 si $D_i = D$ et de probabilité 0 sinon. Si l'un des D_i est différent de D , alors la probabilité de l'intersection est nulle. Si, au contraire, tous les D_i sont égaux à D alors, classiquement, la probabilité de l'intersection est égale à 1. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_1 \in D_1, \dots, X_n \in D_n) = \delta_{D_1, D} \dots \delta_{D_n, D} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in D_i)$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ est indépendante. $\square$

4.5 Le cas intéressant

Nous supposons ici que la suite $\mathcal{F}$ est indépendante et que X n'appartient pas presque sûrement à un élément de Q . On a donc

$$q = \sup\{\mathbb{P}(X \in D) : D \in Q\} < 1$$

Proposition 9. *On suppose que $\mathcal{F}$ est indépendante et pour tout $D \in Q$, $\mathbb{P}(X \in D) \neq 1$. Alors, pour tout $C \in P$, $\mathbb{P}(C) = 0$.*

Rappelons que pour tout $C \in P$, $D(X, C)$ est l'unique $D \in Q$ tel que $C \subseteq \{X \in D\}$.

Démonstration. Soit $C \in P$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C \subseteq \{X_1 \in D(X_1, C), \dots, X_n \in D(X_n, C)\}$$

De là, par l'indépendance de $\mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &\leq \mathbb{P}(X_1 \in D(X_1, C), \dots, X_n \in D(X_n, C)) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in D(X_1, C)) \dots \mathbb{P}(X_n \in D(X_n, C)) \\ &\leq q^n \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on fait tendre n vers l'infini pour obtenir $\mathbb{P}(C) = 0$. $\square$

Proposition 10. *L'hypothèse (H) « Ω est fini ou dénombrable » est absurde.*

Démonstration. On a l'union disjointe finie ou dénombrable

$$\Omega = \bigcup_{j \in F} C_j$$

De là,

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{j \in F} \mathbb{P}(C_j) = 0$$

Contradiction. $\square$